Egzamin licencjacki — 3 lipca 2009

Z zestawu sześciu zadań (Matematyka I, Matematyka II, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych i Metody numeryczne) poniżej należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zadań. Za brakujące (do trzech) zadania zostanie wystawiona ocena nieostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zadania. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zadań. Na rozwiązanie zadań przeznacza się czas 3x40=120 minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I

Za poprawne rozwiązanie całego zadania można otrzymać 9 punktów. 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, a 7 — ocenę bardzo dobrą.

1. **(1 punkt)** Podaj definicje
   - funkcji różnowartościowej
   - funkcji „na”
   - złożenia funkcji
2. **(3 punkty)** Rozważ dwa stwierdzenia poniżej.

   Stwierdzenie 1. Dla dowolnych zbiorów A i B oraz dowolnych takich funkcji $f : A \to B$ i $g : B \to A$, że złożenie gf jest funkcją identycznościową na zbiorze A, funkcja g jest funkcją różnowartościową.

   Stwierdzenie 2. Dla dowolnych zbiorów A i B oraz dowolnych takich funkcji $f : A \to B$ i $g : B \to A$, że złożenie gf jest funkcją identycznościową na zbiorze A, funkcja g jest funkcją „na”.

   Które z tych stwierdzeń są prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź, tzn. podaj dowód prawdziwości tych spośród powyższych dwóch stwierdzeń, które są prawdziwe oraz podaj odpowiednie kontrprzykłady dla tych spośród powyższych dwóch stwierdzeń, które są fałszywe.
3. **(2 punkty)** Sformułuj zasadę indukcji matematycznej (w takiej postaci, która pozwoli na rozwiązanie następnej części zadania).
4. **(3 punkty)** Udowodnij indukcyjnie[1], że każdy graf prosty (tj. nieskierowany graf bez pętli w wierzchołkach i bez krawędzi wielokrotnych) o n wierzchołkach ma co najwyżej $n(n-1)/2$ krawędzi.

[1] **Uwaga**. W tym zadaniu chcemy sprawdzić, czy umiesz posługiwać się indukcją matematyczną. Dlatego każdy inny (nieindukcyjny) dowód tego twierdzenia będzie oceniony na 0 punktów. Dołóż szczególnych starań, aby w swoim dowodzie wykazać, że wszystkie założenia zasady indukcji sformułowanej w poprzednim punkcie są spełnione.

Matematyka II

Za poprawne rozwiązanie całego zadania można otrzymać 9 punktów. 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, a 7 — ocenę bardzo dobrą.

1. **(3 punkty)** Sprawdzić, czy wektory $[3, 2, 2]$, $[4, 1, 1]$ i $[1, 1, 0]$ są niezalezne:
   (a) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$,
   (b) w przestrzeni $\mathbb{Z}_5^3$ nad ciałem $\mathbb{Z}_5$.
2. **(3 punkty)** W ciele $\mathbb{Z}_{17}$ rozwiązać równanie $15x + 3 = 1$.
3. **(3 punkty)** Czy zbiór $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$? Jeśli tak, podać przykładową bazę.

Programowanie

Za zadanie można otrzymać 20 punktów. Aby otrzymac ocenę dostateczną, należy zdobyć 7 punktów, próg dla dst+ to 9p, dla db – 11p, dla db+ 13p, dla bdb – 15p.

Część 1. Gramatyka G_1 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$\{S \to aSa\ ,\ S \to bSb,\ \ S \to \varepsilon\}$$

Gramatyka G_2 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$\{S \to aS\ ,\ S \to aSb,\ S \to SS,\ S \to \varepsilon\}$$

a) Czy gramatyka G_1 jest jednoznaczna (odpowiedź uzasadnij)? **(2)**

b) Niech $A_1 = L(G_1) \cap L(G_2)$. Czy A_1 zawiera słowo kończące się na b? Czy A_1 zawiera słowo, w którym występuje zarówno a jak i b? Obie odpowiedzi uzasadnij. **(3)**

c) Niech $A_2 = (L(G_1) \cup L(G_2))$. Przedstaw gramatykę generującą A_2. **(1)**.

d) Niech $A_3 = A_2 \cap \mathcal{L}((aa^*b^*))$ Przedstaw gramatykę generującą A_3. Uzasadnij krótko, że istotnie generuje ona A_3. Czy A_3 jest językiem regularnym? **(4)**

Część 2. Będziemy rozważać zadanie sortowania listy liczb całkowitych przez wybór (to znaczy, że wybieramy najmniejszą liczbę na liście, umieszczamy ją na początku listy wynikowej itd.). Zadanie to ma dwa warianty, z których musisz wybrać jeden. Jeżeli w odpowiedzi znajdą się oba, to będzie sprawdzany tylko pierwszy.

Wariant funkcjonalny

Możesz używać Haskella albo SML-a. W specyfikacji zadania używamy typów Haskellowych. Każdy podpunkt wart jest **(2.5)**.

a) Napisz funkcję `getMin :: [Int] -> Int`, która dla listy liczb zwraca najmniejszą liczbę z tej listy.

b) Napisz funkcję `delElem :: Int -> [Int] -> [Int]`, która dla liczby oraz niepustej listy liczb zwraca listę liczb, powstałą z listy wejściowej po usunięciu pierwszego wystąpienia wskazanego elementu.

c) Napisz funkcję `selectSort :: [Int] -> [Int]`, która zwraca posortowaną listę wejściową i realizuje algorytm sortowania przez wybór.

d) Czy funkcja `selectSort`, którą napisałeś ma ogólniejszy typ i zastosowanie, niż podane w zadaniu? Podaj najbardziej ogólne zastosowanie i typ, odpowiedź uzasadnij.

Wariant logiczny

W tym wariancie powinieneś używać Prologa. Każdy podpunkt wart jest **(2.5)**.

a) Napisz predykat `getMin(L,M)`, prawdziwy, gdy `M` jest najmniejszą liczbą całkowitą wśród liczb na liście `L`. **(2)**

b) Napisz predykat `delElem(A,L,R)`, prawdziwy, gdy lista `R` powstała przez usunięcie z listy `L` pierwszego wystąpienia elementu `A`.

c) Napisz predykat `selectSort(L,R)`, prawdziwy gdy `R` jest roznąco uporządkowaną permutacją listy `L`. Predykat powinien realizować algorytm sortowania przez wybór.

d) Czy predykat `selectSort` nadaje się jedynie do sortowania list liczb całkowitych? Podaj najbardziej ogólne zastosowanie tego predykatu. Odpowiedź uzasadniej.

Matematyka dyskretna

1. W totolotku skreślamy 6 liczb z 49. Losowanych jest też 6 liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na kuponie mamy dokładnie trzy prawidłowo skreślone liczby? A co w przypadku, gdy możemy skreślić 7 liczb (losowanych jest nadal 6)?

2. Niech $\chi_e(G)$ oznacza indeks chromatyczny. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$,

$$\chi_e(G) \geq \frac{|E|}{\left\lfloor \frac{1}{2} |V| \right\rfloor}$$

Algorytmy i struktury danych

Za poprawne rozwiązanie całego zadania (3 części) można otrzymać 9 punktów. 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 — ocenę bardzo dobrą.

Część 1: wyszukiwanie w uporządkowanej macierzy kwadratowej (3 punkty)

Dana jest *kwadratowa macierz* T o rozmiarach $n \times n$, w której zapisane są liczby rzeczywiste. Liczby w tej macierzy są *posortowane po wierszach i po kolumnach*:

$$T_{i,j-1} \leq T_{i,j} \quad \text{dla} \quad i = 0 \ldots n-1 \,,\; j = 1 \ldots n-1$$

$$T_{i-1,j} \leq T_{i,j} \quad \text{dla} \quad i = 1 \ldots n-1 \,,\; j = 0 \ldots n-1$$

Skonstruuj wydajny algorytm, który w tablicy $T[0 \ldots n-1][0 \ldots n-1]$ będzie szukał zadanej wartości x. Uzasadnij poprawność działania przedstawionej metody i oszacuj jej złożoność czasową.

Część 2: kopce dwumianowe (3 punkty)

Opisz strukturę danych zwaną *kopcem dwumianowym*:

- (1.0 pkt.) Opisz budowę kopca dwumianowego.
- (1.5 pkt.) Jakie operacje są efektywnie zaimplementowane w tej strukturze danych i jaka jest ich złożoność czasowa? Opisz dokładniej operację łączenia kopców dwumianowych.
- (0.5 pkt.) Narysuj kopiec dwumianowy zawierający 21 różnych liczb naturalnych.

Część 3: najdłuższy wspólny podciąg (3 punkty)

Opisz zadanie znajdowania *najdłuższego wspólnego podciągu*:

- (2.0 pkt.) Opisz dokładnie na czym polega problem (co jest dane i jakich oczekujemy wyników) znajdowania długości najdłuższego wspólnego podciągu. Jaką techniką rozwiązuje się to zadanie? Opisz działanie algorytmu rozwiązującego to zadanie, uzasadnij jego poprawność i przeanalizuj złożoność obliczeniową.
- (1.0 pkt.) Znajdź długość najdłuższego wspólnego podciągu dla pary słów $ACBCCAB$ i $BACAABC$. Przeprowadź stosowne obliczenia, umieszczając w odpowiedniej tabeli wyniki rozwiązań częściowych. Na podstawie tej tabeli skonstruuj i wypisz jeden taki podciąg.

Metody numeryczne

1. Dana jest macierz trójprzekątniowa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ postaci

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

oraz wektor $d = [d_1, d_2, \ldots, d_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zaproponuj efektywny sposób rozwiązywania układu równań liniowych

$$Ax = d \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Podaj złożoność swojego algorytmu w zależności od rozmiaru n macierzy A.

(b) Jak sprawnie obliczyć wyznacznik macierzy A?