# Egzamin licencjacki/inżynierski — 26 czerwca 2012

Z zestawu sześciu zadań (Matematyka I, Matematyka II, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych i Metody numeryczne) poniżej należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zadań. Za brakujące (do trzech) zadania zostanie wystawiona ocena nieostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zadania. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zadań. Na rozwiązanie zadań przeznacza się czas 3x40=120 minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

## Matematyka I — Logika dla informatyków

Mówimy, że liczba naturalna $x$ jest *dzielnikiem* liczby naturalnej $y$ jeśli istnieje taka liczba naturalna $k$, że $kx = y$. Mówimy, że liczba $d$ jest *wspólnym dzielnikiem* liczb $x$ i $y$ jeśli $d$ jest dzielnikiem $x$ oraz $d$ jest dzielnikiem $y$. Mówimy, że $d$ jest *największym wspólnym dzielnikiem* $x$ i $y$ jeśli $d$ jest wspólnym dzielnikiem $x$ i $y$ oraz dla dowolnego wspólnego dzielnika $d'$ liczb $x$ i $y$ zachodzi nierówność $d' \leq d$; piszemy wówczas $d = \text{nwd}(x, y)$. Wiadomo, że dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych $x$ i $y$ istnieje dokładnie jedna taka liczba $d$, że $d = \text{nwd}(x, y)$.

Niech $x$ i $y$ będą dodatnimi liczbami naturalnymi spełniającymi nierówność $x > y$. Udowodnij, że $\text{nwd}(x, y) = \text{nwd}(x - y, y)$.

*Uwaga:* to zadanie jest jednym z głównych lematów w dowodzie poprawności algorytmu Euklidesa. Oczywiście w jego rozwiązaniu nie można korzystać z poprawności tego algorytmu. Nie można też korzystać z żadnych innych (niewymienionych w treści zadania) własności dzielników.

## Matematyka II — Algebra

1. Dana jest przestrzeń liniowa $V$ o wymiarze $n$. Niech $k$ będzie liczbą naturalną taką że $0 \leq k \leq n$. Wykazać, że istnieje podprzestrzeń liniowa $W$ przestrzeni $V$ taka, że $\dim W = k$.

2. Rozważamy zbiór $G$ macierzy $2 \times 2$ o elementach rzeczywistych, o wyznaczniku równym 1. Czy jest to grupa ze względu na mnożenie macierzy?

3. Znaleźć rząd elementu 17 w grupie $Z^\star(39)$ (liczby względnie pierwsze z 39, wraz z mnożeniem modulo 39).

## Programowanie

Za zadanie można otrzymać 20 punktów. Aby otrzymać ocenę dostateczną, należy zdobyć 7 punktów, próg dla dst+ to 9p, dla db – 11p, dla db+ 13p, dla bdb – 15p.

**Część 1.** Gramatyka $G_1$ z symbolem startowym $S$ nad alfabetem $\{a, b, c\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$\{C \to \varepsilon,\ C \to cC,\ A \to Ca,\ B \to Cb,\ S \to SS,\ S \to ASB,\ S \to BSA, S \to \varepsilon\}$$

Dla gramatyki $G$ przez $L(G)$ rozumieć będziemy język generowany przez $G$. Dla wyrażenia regularnego $r$ przez $\mathcal{L}(r)$ rozumiemy język opisany przez wyrażenie $r$.

a) Czy *ccabbcaba* należy do $L(G_1)$? Odpowiedź uzasadnij. **(1)**

b) Co to znaczy, że gramatyka jest jednoznaczna. Czy gramatyka $G_1$ jest jednoznaczna (odpowiedź uzasadnij)? **(2)**

c) Opisz jakie słowa należą do języka $L(G_1)$ **(1)**

d) Dla następujący zbiorów przedstaw wyrażenia regularne je reprezentujące, ew. gramatyki bezkontekstowe je generujące. Przy czym, jeżeli to tylko jest możliwe, powinieneś używać wyrażeń regularnych. **(4)**

- $L(G_1) \cap \mathcal{L}(c^*a^*)$
- $L(G_1) \cap \mathcal{L}(a^*b^*a^*)$ $(\star)$
- $L(G_1) \cap \mathcal{L}(c^*(a+b)^*)$
- $L(G_1) \cap \mathcal{L}((abc)^*)$

e) Uzasadnij prawdziwość równości, którą podałeś dla podpunktu $(\star)$ z poprzedniego zadania. **(2)**

**Część 2.** W zadaniu będziemy rozważać listy liczb całkowitych (na których poszczególne wartości mogą się powtarzać). Konkretną liczbę $n$, występującą na liście $L$ nazwiemy *rzadką*, jeżeli co najmniej połowa różnych wartości z listy $L$ występuje częściej niż $n$.

Przykładowo lista $[1, 1, 2, 2, 3, 3]$ nie zawiera żadnej rzadkiej liczby. Lista $[1, 1, 2, 2, 8]$ zawiera jedną rzadką liczbę (równą 8), bowiem występują na niej trzy różne wartości, a wartości 1 i 2 występują częściej niż wartość 8.

Twoim celem będzie napisanie funkcji (lub predykatu), który dla zadanej listy liczb zwróci różnowartościową listę, w której występują tylko te liczby, które w zadanej liście liczb były rzadkie. Zadanie warte jest 10p.

**Wariant funkcjonalny. Haskell.**

W podpunktach a) i b) nie powinieneś korzystać z żadnych funkcji standardowych.

a) Słownik możemy reprezentować jako listę par klucz-wartość. Podaj specyfikację funkcji (oraz ich definicje), które odczytują ze słownika wartość dla klucza, dodają parę (wartość,klucz) do słownika, oraz zmieniają wartość przypisaną kluczowi, który już istnieje. Efektywność rozwiązania nie ma żadnego znaczenia. Przy dodawaniu pary lub zmianie wartości powinny tworzyć się nowe słowniki. **(3)**

b) Napisz funkcję która bierze na wejściu listę liczb całkowitych i zwraca słownik, w którym kluczami są elementy listy, a wartościami – liczby wystąpień tych elementów na wejściowej liście. **(2)**

c) Napisz funkcję, która na wejściu bierze listę liczb całkowitych, a na wyjściu zwraca różnowartościową listę, która zawiera te i tylko te liczby z wejściowej listy, które są rzadkie. Kolejność nie ma znaczenia. **(3)**

d) W jaki sposób można uogólnić definicje używane w tym zadaniu. Podaj typy uogólnionych funkcji.**(2)**

**Wariant logiczny. Prolog**

W podpunktach a) i b) nie powinieneś korzystać z żadnych predykatów standardowych.

a) Słownik możemy reprezentować jako listę par klucz-wartość. Podaj specyfikację predykatów (oraz ich definicje), które odczytują ze słownika wartość dla klucza, dodają parę (wartość,klucz) do słownika, oraz zmieniają wartość przypisaną kluczowi, który już istnieje. Efektywność rozwiązania nie ma żadnego znaczenia. **(3)**

b) Napisz dwuargumentowy predykat który przetwarza listę liczb całkowitych (swój pierwszy argument) i unifikuje drugi argument ze słownikiem, w którym kluczami są elementy listy, a wartościami – liczby wystąpień tych elementów na wejściowej liście. **(2)**

c) Napisz dwuargumentowy predykat, który jako pierwszy argument bierze listę liczb całkowitych, a po zakończeniu działania unifikuje drugi argument z różnowartościową listą, która zawiera te i tylko te liczby z wejściowej listy, które są rzadkie. Kolejność elementów na liście „wynikowej" nie ma znaczenia. **(3)**

d) W jaki sposób można uogólnić definicje używane w tym zadaniu. Opisz dokładnie wartości, dla których Twoje predykaty działają prawidłowo **(2)**

## Matematyka dyskretna

Ile jest (uporządkowanych) szóstek liczb całkowitych nieujemnych $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, takich że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2012$?

## Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie wszystkich trzech zadań z tej części można otrzymać do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 — ocenę bardzo dobrą.

**Zadanie 1: sortowanie przez zliczanie (5 punktów)**

W $n$–elementowej tablicy zapisane są liczby naturalne z zakresu od 1 do $n^2$. W oparciu o algorytm *sortowania przez zliczanie* skonstruuj metodę, która posortuje te liczby w liniowym czasie.

- Precyzyjnie opisz algorytm sortowania przez zliczanie. Jaka jest jego złożoność obliczeniowa? Czy jest on stabilny i czy działa w miejscu?
- Jak opisany algorytm sortowania przez zliczanie zaadoptować do rozwiązania przedstawionego problemu? Jakie cechy tego algorytmu są dla Twojego rozwiązania najbardziej istotne? Uzasadnij odpowiedzi.

**Zadanie 2: minimalna liczba tankowań (4 punkty)**

Pewien kierowca na przejechać z miasta $A$ do miasta $B$ określoną trasą. Bak pełen paliwa w jego samochodzie wystarczy na przejechanie $n$ km. Na jego mapie są zaznaczone odległości pomiędzy wszystkimi stacjami benzynowymi na trasie. Kierowca ma zamiar tankować jak najmniejszą liczbę razy w czasie swojej podróży.

- Podaj efektywny algorytm, który pomoże kierowcy ustalić, na których stacjach powinien on tankować paliwo.
- Udowodnij, że zaproponowana strategia zawsze prowadzi do optymalnego rozwiązania.

## Metody numeryczne

1. Wyjaśnij zjawisko *utraty cyfr znaczących*. Następnie, stosując tylko operacje arytmetyczne i pierwiastkowanie, zaproponuj taki algorytm numerycznego obliczania rzeczywistych miejsc zerowych wielomianu

$$w(x) := x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b \qquad (a, b \in \mathbb{R}),$$

który zminimalizuje możliwość występowania zjawiska utraty cyfr znaczących. Podaną metodę uzasadnij.