

Egzamin na studia II stopnia (23 września 2009 r.)

Zadania z analizy numerycznej

1. (35 punktów) Niech $L_4(x)$ będzie wielomianem interpolującym funkcję

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

w pewnych punktach x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 przedziału $[-\pi, \pi]$. Udowodnić, że jeśli jest spełniony warunek

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)| \leq 0.12,$$

to zachodzi nierówność

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - L_4(x)| \leq 2 \cdot 10^{-3}.$$

2. (30 punktów) Zbadać, czy funkcja

$$s(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi/2], \\ \cos(\pi/2 - x), & x \in [\pi/2, \pi], \\ -\frac{1}{2\pi}x^3 + 3x^2 - \frac{11\pi}{2}x + 3\pi^2, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną III stopnia określoną dla $x \in [0, 2\pi]$, przyjmującą w punktach $0, \pi/2, \pi, 2\pi$ wartości odpowiednio $0, 1, 0, 1$.

Podać wszystkie uzasadnienia odpowiedzi pozytywnej albo negatywnej.

3. (35 punktów) Pierwsze cztery wiersze tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$ dla całki $\int_0^1 x^{3/2} dx$ zawierają następujące liczby:

0.500000			
0.426777	0.402369		
0.407018	0.400432	0.400303	
0.401812	0.400077	0.400054	<input type="text"/>

Opisać sposób wyznaczenia liczby, która powinna pojawić się w miejscu wskazanym ramką, a następnie podać tę liczbę.