

# Algorytmy i Struktury Danych

egzamin na magisterskie studia uzupełniające

wrzesień 2014 r.

## Zadanie 1: dolna granica dla problemu scalania (24 punkty)

Rozważmy kolejkę priorytetową  $Q$  z operacjami:

- $Q.create(S)$  — utworzenie kolejki priorytetowej złożonej z elementów zbioru  $S$ ,
- $Q.insert(x)$  — wstawienie nowego elementu  $x$  do kolejki,
- $Q.top()$  — sprawdzenie, który element w kolejce ma najwyższy priorytet,
- $Q.extract-max()$  — wyciągnięcie z kolejki elementu o najwyższym prioryecie.

Wyjaśnij, dlaczego złożoność czasowa operacji  $extract-max$  wynosi  $\Omega(\log n)$ , gdzie  $n$  jest liczbą wszystkich elementów w kolejce priorytetowej.

## Zadanie 2: graf dynamiczny (44 punktów)

Graf dynamiczny to graf, w którym można dodawać i usuwać zarówno krawędzie jak i wierzchołki. Wierzchołki niech będą oznaczone unikatowymi liczbami naturalnymi; krawędzie to po prostu pary wierzchołków.

Zaprojektuj strukturę danych dla grafu dynamicznego, która pozwoli efektywnie realizować następujące operacje:

- sprawdzenie, czy wierzchołek o podanym numerze istnieje w grafie;
- dodanie nowego wierzchołka do grafu;
- usunięcie zadanego wierzchołka z grafu wraz ze wszystkimi incydentnymi krawędziami;
- wyznaczenie stopnia zadanego wierzchołka;
- sprawdzenie, czy podana krawędź istnieje w grafie;
- dodanie nowej krawędzi do grafu;
- usunięcie zadanej krawędzi z grafu.

Opisz krótko działanie wymienionych operacji na Twojej strukturze. Jakie będą złożoności czasowe tych operacji.

## Zadanie 3: optymalizacja drzewa AVL (32 punkty)

Drzewo AVL jest zrównoważonym drzewem BST. Tradycyjna implementacja tego drzewa jest taka, że w każdym węźle tej struktury pamiętamy klucz i różnicę wysokości poddrzew doczepionych do tego węzła (plus oczywiście wskaźniki do poddrzew). Chcielibyśmy jednak pozbyć się tej dodatkowej informacji o różnicy wysokości poddrzew w każdym węźle.

- Krótko ale precyzyjnie opisz strukturę drzewa AVL.
- Wyjaśnij, w jaki sposób można się pozbyć informacji o różnicy wysokości poddrzew z każdego węzła.
- Uzasadnij, że zaproponowana modyfikacja nie spowoduje asymptotycznego pogorszenia się czasu działania żadnej operacji słownikowej w takim drzewie.